Was ist Logik?

Die ganze Geschichte der Logik besteht in der Definition eines akzeptablen Begriffs der Dummheit.
Umberto Eco,
Das Foucaultsche Pendel, S. 81

Die Geschichte der Logik ist eng verknüpft mit der Philosophie.

Die encyclopaedia britannica teilt das Wissen der Menschheit in 7 Haupt-zweige ein. Einer davon ist Logik.
vergl. auch Goethe, Faust

Habe nun, ach! **Philosophie**,
Juristerei und **Medizin**,
Und leider auch **Theologie**
Durchaus studiert mit heißem Bemühn.
Da steh' ich nun, ich armer Tor,
Und bin so klug als wie zuvor!
Heiße Magister, heiße Doktor gar,
Und ziehe schon an die zehen Jahr
Herauf, herab und quer und krumm
Meine Schüler an der Nase herum -
Und sehe, dass wir nichts wissen können!
Das will mir schier das Herz verbrennen.

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium **Logic**um.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn

Was ist Logik?

Logik [griechisch „logos“: Wort, Rede, Aussage, Behauptung, Vernunft, ...] wurde als „Wissenschaft vom richtigen Schließen“ von Aristoteles (384-322) begründet und hat die verschiedensten philosophischen und theologischen Erweiterungen erfahren.

Die Endung *-logie* steht für Lehre, Wissenschaft.

Logik untersucht, wie aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen folgen.

Logik erlaubt, nach festen Regeln aus Wissen neues Wissen abzuleiten.

Logik ist die Grundlage für viele andere Gebiete: Mathematik, Informatik, künstliche Intelligenz. Vergl. Logische Programmierung, Unterrichtsmitschrift

Logik ist das Modell für das menschliche Denken. (?)

Definition

Logik ist die allgemeine Theorie der folgerichtigen Aussagen und ihrer gültigen Beziehungen.

DUDEN INFORMATIK

Logik (griech. ἡ λογική (τέχνη) [he logiké téchne] „die denkende [Kunst, Vorgehensweise]“) ist die Lehre des vernünftigen (Schluss-)Folgerns. Die Logik untersucht die Gültigkeit von Argumenten hinsichtlich ihrer Struktur **unabhängig vom konkreten Inhalt** der eigentlichen Aussagen. In diesem Sinne spricht man auch von „formaler“ Logik. Die Logik ist sowohl ein Teilgebiet der Philosophie als auch der Mathematik und der Informatik.

WIKIPEDIA

modus ponens

Beispiele:

Wenn es regnet, wird die Straße nass.

Es regnet.

Also wird die Straße nass.

Vögel können fliegen.

Tweety ist ein Vogel.

Also kann Tweety fliegen.

Katzen ernähren sich gesund.

Garfield ist eine Katze.

Also ernährt sich Garfield gesund.

universelle Schlussregel „modus ponens“

Wenn A wahr ist, dann ist B wahr.

A ist wahr.

Also ist B wahr.

Aussagen

Atomare Aussagen sind einfache deklarative Sätze,

Es regnet.

Die Straße ist nass.

die wahr oder falsch sind.

Zusammengesetze Aussagen sind mit Konnektoren verbundene Aussagen.

Es regnet und die Straße ist nass.

Deren Wahrheitswert richtet sich nach den Wahrheitswerten der beteiligten Teilaussagen.

In natürlichen Sprachen gibt es Sätze ohne Wahrheitswert.

Regnet es?

Fegen Sie bitte die Straße!

Logische Konnektoren

Konnektor: [griechisch: Verbinder], auch Junktor

erlaubt es, Aussagen zu verbinden

die (formal-)logische Bedeutung wird durch Wahrheitswerttabellen definiert

die logische Bedeutung entspricht nicht in jedem Fall der Bedeutung des entsprechenden natürlichsprachlichen Ausdrucks

einstellige Konnektoren

Konnektoren, die auf eine Aussage wirken, heißen einstellig.

Es gibt 4 einstellige Konnektoren,

Identität	
P	P
w	w
f	f

Tautologie	
P	$\top$
w	w
f	w

Kontradiktion	
P	$\bot$
w	f
f	f

Negation	
P	¬P
w	f
f	w

weil es nicht mehr als vier Wahrheitswerttabellen geben kann.

mehrstellige Konnektoren

Konnektoren werden durch Wahrheitswerttabellen definiert.

Eine Wahrheitswerttabelle mit 2 Aussagen hat 4 Zeilen, eine mit 3 Aussagen 8.

P	
w	
f	

P	Q	
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

P	Q	R	
w	w	w	
w	w	f	
w	f	w	
w	f	f	
f	w	w	
f	w	f	
f	f	w	
f	f	f	

Eine Wahrheitswerttabelle mit n Aussagen hat 2^n Zeilen. Für jedes der 2^n Felder gibt es 2 mögliche Eintragungen also gibt es

2^{2^n} n-stellige Konnektoren.

Negation / nicht / not

Die Negation ist ein einstelliger Konnektor, sie kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um.

Negation	
P	¬P
w	f
f	w

In der natürlichen Sprache wird *nicht* häufig auch als Frageanhängsel (isn‘t it) verwendet.

Beispiel:
Ich habe gerade mit Herrn Schneider gesprochen.

„Sie haben nicht zufällig Herrn Schneider gesehen?“

natürlichsprachlich muss ich mit ja antworten

formal-logisch muss ich mit nein antworten, denn ich muss die falsche Aussage negieren.

Konjunktion / und / and

Die logische Konjunktion ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Konjunktion		
P	Q	P ∧ Q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

An der Wahrheitswerttafel erkennt man, dass *und* kommutativ ist.

Hingegen enthält das natürlichsprachliche *und* häufig eine zusätzliche zeitliche Bedeutung.
Die Sätze

Ich werde müde und gehe ins Bett.

Ich gehe ins Bett und werde müde.

drücken zwei verschiedene Sachverhalte aus.

Disjunktion / oder / or

Die logische Disjunktion ist genau dann wahr, wenn (mindestens) eine Teilaussage wahr ist.

Disjunktion		
P	Q	P ∨ Q
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

An der Kasse läßt sich die Frage

„Zahlen Sie bar oder mit Karte?“

stets mit ja beantworten, denn man beabsichtigt ja zu zahlen.

Auch

„Zahlen Sie entweder bar oder mit Karte?“

hilft nicht weiter, wie wir noch sehen werden.

Richtig muss es heißen

„Wie möchten Sie zahlen?“

Disjunktion / oder / or

Die logische Disjunktion ist genau dann wahr, wenn (mindestens) eine Teilaussage wahr ist.

Disjunktion		
P	Q	$P \vee Q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die logische Disjunktion ist inklusiv, das heißt sie auch wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

In der natürlichen Sprache hat *oder* oft exklusive Bedeutung. Der Satz

„Meine Schwiegermutter kommt heute oder morgen“

meint

„Meine Schwiegermutter kommt (heute und morgen nicht) oder (morgen und heute nicht).

oder

„Meine Schwiegermutter kommt entweder heute oder morgen“

Kontravalenz / entweder oder / xor

Die logische Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine Teilaussage wahr ist.

Kontravalenz		
P	Q	$P \dot{\vee} Q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Frage

„Zahlen Sie entweder bar oder mit Karte?“

ist formal-logisch (und auch nach den Regeln der deutschen Grammatik) immer noch eine Entscheidungsfrage, meint allerdings immer noch die Ergänzungsfrage

„Wie möchten Sie zahlen?“

Implikation / daraus folgt

Die logische Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches gefolgert wird.

Implikation		
P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Aussage

„Wenn der Mond ein Käse ist, dann ist 4 ungerade."

ist formal-logisch wahr, obwohl beide Aussagen falsch sind und zwischen ihnen kein kausaler Zusammenhang besteht.

Dieser Fall wird als „ex falso quodlibet" (aus Falschem folgt Beliebiges) bezeichnet.

Implikation / daraus folgt

Die logische Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches gefolgert wird.

Implikation		
P	Q	P⇒Q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man sagt,

P ist hinreichend für Q

und

Q ist notwendig für P

„Wenn es regnet, wird die Straße nass.“ sei eine wahre Aussage.

Regen ist hinreichend für eine nasse Straße.
Wenn man eine nasse Straße sieht, könnte es geregnet haben. (muss aber nicht)

Eine nasse Straße ist notwendig(e Folge) für Regen.
Wenn es geregnet hat, muss die Straße nass sein.

Vorrangregeln

Zusammengesetze Ausdrücke mit mehreren Konnektoren wie

$A \Rightarrow B \vee A \wedge \neg B$

sind möglicherweise unklar. Klärung schaffen Vorrangregeln oder Klammern.

Vorrangregeln

Negation / nicht / not

vor

Konjunktion / und / and

vor

Disjunktion / oder / or

vor

Implikation.

$(A \Rightarrow (B \vee (A \wedge (\neg B))))$

Wahrheitswerttabellen

atomaren Ausdrücken werden Wahrheitswerte {w,f} zugewiesen
Belegung mit Wahrheitswerten

Unterschied zur Mathematik: Aussage – Aussageform

mithilfe der elementaren Wahrheitswerttabellen lassen sich jetzt für die komplexen Ausdrücke Wahrheitswerttabellen erstellen

praktisch schwierig, da exponentielles Wachstum

es gibt 2 Arten von Wahrheitswerttabellen

Wahrheitswerttabellen

Beispiel: $A \Rightarrow B \land \neg A$

A	B	$\neg A$	$B \land \neg A$	$A \Rightarrow B \land \neg A$
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	f	w

A	$\Rightarrow$	B	$\land$	$\neg$	A
w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f
f	w	f	f	w	f

Erfüllbarkeit, Widerlegbarkeit

Eine Aussage heißt erfüllbar, wenn sie durch irgendeine Belegung mit Wahrheitswerten zu einer wahren Aussage wird.

$A \wedge B$ ist mit $A = w$, $B = w$ erfüllbar.

Eine Aussage heißt widerlegbar, wenn sie durch irgendeine Belegung mit Wahrheitswerten zu einer falschen Aussage wird.

$A \wedge B$ ist mit $A = w$, $B = f$ widerlegbar.

Tautologie, Kontradiktion

Eine Tautologie ($\top$) ist eine nicht widerlegbare Aussage.
Sie ist immer wahr.

Jede mögliche Belegung mit Wahrheitswerten führt zu einer wahren Aussage.

Eine Kontradiktion ($\perp$) ist eine nicht erfüllbare Aussage.
Sie ist immer falsch.

Jede mögliche Belegung mit Wahrheitswerten führt zu einer falschen Aussage.

Eine Aussage ist genau dann eine Tautologie, wenn ihre Negation eine Kontradiktion ist und umgekehrt.

Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen heißen logisch äquivalent, wenn sie die gleiche Wahrheitswerttabelle besitzen.

$A \Rightarrow \neg B$

A	⇒	¬	B
w	f	f	w
w	w	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f

$\neg (A \wedge B)$

¬	(A	∧	B)
f	w	w	w
w	w	f	f
w	f	f	w
w	f	f	f

Diese beiden Aussagen sind logisch äquivalent.

Man schreibt $A \Rightarrow \neg B \equiv \neg (A \wedge B)$.

Logische Äquivalenz

Wahrheitswerttabellen

- atomaren Ausdrücken werden Wahrheitswerte {w,f} zugewiesen
  Belegung mit Wahrheitswerten
- Unterschied zur Mathematik: Aussage – Aussageform
- mithilfe der elementaren Wahrheitswerttabellen lassen sich jetzt für die komplexen Ausdrücke Wahrheitswerttabellen erstellen
- praktisch schwierig, da exponentielles Wachstum
- es gibt 2 Arten von Wahrheitswerttabellen

Aussagenlogik | M. Apsel | S. 17 / 43

Es wäre schön, wenn es Gesetzmäßigkeiten gäbe.

Es gilt

$A \wedge A \wedge \ldots \wedge A \equiv A$

Beweis

A	∧	A
w	w	w
f	f	f

Es gilt

$A \vee A \vee \ldots \vee A \equiv A$

A	∨	A
w	w	w
f	f	f

Die entsprechenden Spalten sind identisch.

Idempotenz

Es gilt nicht

$A \dot{\vee} A \equiv A$

Beweis

A	$\dot{\vee}$	A
w	f	w
f	f	f

Die entprechenden Spalten sind nicht identisch.
Wir haben sogar eine Kontradiktion gefunden.

Es gilt nicht

$A \Rightarrow A \equiv A$

A	$\Rightarrow$	A
w	w	w
f	w	f

Die entprechenden Spalten sind nicht identisch.
Wir haben sogar eine Tautologie gefunden.

Idempotenz

Es gilt nicht

$A \dot{\vee} A \equiv A$

Es gilt nicht

$A \Rightarrow A \equiv A$

Untersuchen Sie wiederholte Kontravalenz und Implikation!

$A \Rightarrow A \Rightarrow A$

$A \Rightarrow A \Rightarrow A \Rightarrow A$

A xor A xor A

A xor A xor A xor A

Verallgemeinern Sie!

Kommutativität

Kommutativgesetz - Vertauschungsgesetz

Konjunktion, Kontravalenz und Disjunktion sind kommutativ.

Implikation hingegen nicht.

Man überzeuge sich an den Wahrheitswerttabellen.

Assoziativität

Assoziativgesetz - Verbindungsgesetz
man darf beliebig Klammern setzen

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

Konjunktion, Kontravalenz und Disjunktion sind assoziatativ.

Man überzeuge sich an den Wahrheitswerttabellen.
jetzt welche mit 3 Variablen, also 8 Zeilen

Die Implikation ist nicht assoziativ.

Man prüfe etwa $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ oder $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow B)$

Assoziativität

Assoziativgesetz - Verbindungsgesetz

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(A	⇒	B)	⇒	A
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	f	f
f	w	f	f	f

~~≡~~

A	⇒	(B	⇒	A)
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
f	w	w	f	f
f	w	f	w	f

Die entsprechenden Spalten sind nicht identisch.
Die Assoziativität gilt nicht.

Gesetzmäßigkeit:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ ist eine Tautologie

Assoziativität

Assoziativgesetz - Verbindungsgesetz

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B \;\equiv\; A \Rightarrow (B \Rightarrow B)$

(A	$\Rightarrow$	B)	$\Rightarrow$	B
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	w	f	f	f

$\not\equiv$

A	$\Rightarrow$	(B	$\Rightarrow$	B)
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	f

Die entsprechenden Spalten sind nicht identisch.
Die Assoziativität gilt nicht.

Gesetzmäßigkeiten:

$A \Rightarrow A$ ist eine Tautologie
$A \Rightarrow \top$ ist eine Tautologie
$\top \Rightarrow A \equiv A$

Distributivität

Distributivgesetz - Verteilungsgesetz
ein gemeinsamer Faktor wird auf alle Summanden verteilt
$a(b + c) = ab + ac$

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Für Konjunktion und Disjunktion gelten Distributivgesetze.

Man überzeuge sich an den Wahrheitswerttabellen.
wieder welche mit 3 Variablen, also 8 Zeilen

Man prüfe auch die Kontravalenz auf Distributivität mit Konjunktion bzw. Disjunktion.
4 Gesetze sind zu prüfen

Die Implikation ist nicht distributiv mit Konjunktion bzw. Disjunktion.

Man prüfe etwa $A \Rightarrow (A \wedge B) \equiv (A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$ und
$A \wedge (A \Rightarrow B) \equiv (A \wedge A) \Rightarrow (A \wedge B)$.

Distributivität

Distributivgesetz - Verteilungsgesetz

A ⇒ (A ∧ B) ≡ (A ⇒ A) ∧ (A ⇒ B)

A	⇒	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	w	f

≡ ✓

A ⇒ A	∧	A ⇒ B
w	w	w
w	f	f
w	w	w
w	w	w

A ∧ (A ⇒ B) ≡ (A ∧ A) ⇒ (A ∧ B)

A	∧	A ⇒ B
w	w	w
w	f	f
f	f	w
f	f	w

~~≡~~

A ∧ A	⇒	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	w	f

doppelte Negation

$\neg(\neg A) \equiv A$

Regeln von de Morgan

Augustus de Morgan (1806 – 1871)

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

die Negation einer Konjunktion ist die Disjunktion der Negationen

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

die Negation einer Disjunktion ist die Konjunktion der Negationen

Beweis

¬	A ∧ B
f	w
w	f
w	f
w	f

≡

¬A	∨	¬B
f	f	f
f	w	w
w	w	f
w	w	w

¬	A ∨ B
f	w
f	w
f	w
w	f

≡

¬A	∧	¬B
f	f	f
f	f	w
w	f	f
w	w	w

Implikation

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Beweis

$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A$	$\vee$	B
w		f	w	w
f		f	f	f
w		w	w	w
w		w	w	f

adäquate Mengen von Konnektoren

Es gibt 16 verschiedene Konnektoren.

Die Tatsache $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ zeigt, dass man auf die Implikation verzichten kann.

Wieviele Konnektoren braucht man überhaupt?

Eine Menge von Konnektoren heißt funktional vollständig, wenn alle 16 Konnektoren damit dargestellt werden können.

Z. B. sind $\{\neg;\wedge\}$ und $\{\neg;\vee\}$ funktional vollständig.

Adäquate Mengen logischer Konnektoren sind für die Entwicklung von integrierten Schaltkreisen von großer Bedeutung.

Aufgabe: Stellen Sie $\vee$ und $\Rightarrow$ nur mit $\{\neg;\wedge\}$ dar.
Stellen Sie $\wedge$ und $\Rightarrow$ nur mit $\{\neg;\vee\}$ dar.

adäquate Mengen von Konnektoren

Lösung: $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Hieraus lässt sich eine der Regeln von de Morgan herleiten.

$A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B$

$\neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee \neg(\neg B)$

Shefferscher Strich

adäquate Mengen von Konnektoren können aus einem einzigen Konnektor bestehen.

Shefferscher Srich, NAND, *nicht und*
Henry Maurice Sheffer (1882 - 1964)

A	B	A↑B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Regeln von de Morgan

Augustus de Morgan (1806 – 1871)

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

die Negation einer Konjunktion ist die Disjunktion der Negationen

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

die Negation einer Disjunktion ist die Konjunktion der Negationen

Beweis

¬	A ∧ B
f	w
w	f
w	f
w	f

≡

¬A	∨	¬B
f	f	f
f	w	w
w	w	f
w	w	w

¬	A ∨ B
f	w
f	w
f	w
w	f

≡

¬A	∧	¬B
f	f	f
f	f	w
w	f	f
w	w	w

Umformungsregeln der Aussagenlogik M. Apsel S. 33 / 43

Peirce-Operator

adäquate Mengen von Konnektoren können aus einem einzigen Konnektor bestehen.

Peirce-Operator, NOR, *nicht oder*
Charles Sanders Peirce (1839 - 1914)

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Peirce hat die Regeln von de Morgan 30 Jahre vor de Morgan entdeckt, aber erst viel später publiziert.

Regeln von Peirce

Charles Sanders Peirce (1839 – 1914)

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

die Negation einer Konjunktion ist die Disjunktion der Negationen

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

die Negation einer Disjunktion ist die Konjunktion der Negationen

Beweis

¬	A ∧ B
f	w
w	f
w	f
w	f

≡

¬A	∨	¬B
f	f	f
f	w	w
w	w	f
w	w	w

¬	A ∨ B
f	w
f	w
f	w
w	f

≡

¬A	∧	¬B
f	f	f
f	f	w
w	f	f
w	w	w

Shefferscher Strich / Peirce-Operator

Aufgabe: Stellen Sie die Konnektoren nur mit dem Shefferschen Strich bzw. dem Peirce-Operator dar.

Lösung:

not A	$\equiv$	$A \uparrow A$
A and B	$\equiv$	$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$
A or B	$\equiv$	$(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$
A xor B	$\equiv$	$(A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B)$
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$A \uparrow (B \uparrow B)$
A nor B	$\equiv$	$((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

not A	$\equiv$	$A \downarrow A$
A and B	$\equiv$	$(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$
A or B	$\equiv$	$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$
A xor B	$\equiv$	$(((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow (A \downarrow (B \downarrow B))) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow (A \downarrow (B \downarrow B)))$
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow B)$
A nand B	$\equiv$	$((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$

Dies zeigt, dass man bei Schaltkreisen mit nur einer Komponente auskommt. Jedoch werden die Schaltkreise möglicherweise komplizierter. Welche Optimierung - Reduzierung der Komponenten oder Reduzierung der verschiedenen Komponenten - man wählt, hängt von der Situation ab.

Analyse natürlichsprachlicher Sätze

Aufgabe: Prüfen Sie ob folgende Sätze denselben Sachverhalt widergeben.

Die Versammlung findet statt, wenn alle Teilnehmer rechtzeitig informiert wurden und die Versammlung beschlussfähig ist. Die Versammlung ist beschlussfähig, wenn mindestens 15 Teilnehmer anwesend sind. Die Teilnehmer sind rechtzeitig informiert worden, wenn es keinen Streik der Postbeamten gab.

Wenn die Versammlung nicht stattfand, dann waren weniger als 15 Teilnehmer anwesend oder es gab einen Streik der Postbeamten.

Lösung: Wir führen atomare Aussagen ein

s	die Versammlung findet statt
t	alle Teilnehmer wurden rechtzeitig informiert
f	mindestens 15 Teilnehmer sind anwesend
b	die Versammlung ist beschlussfähig
p	es gab einen Streik der Postbeamten

und übersetzen Satz für Satz.

Analyse natürlichsprachlicher Sätze

s	die Versammlung findet statt,	t	alle Teilnehmer wurden rechtzeitig informiert
f	mindestens 15 Teilnehmer sind anwesend,	b	die Versammlung ist beschlussfähig
p	es gab einen Streik der Postbeamten		

Die Versammlung findet statt, wenn alle Teilnehmer rechtzeitig informiert wurden und die Versammlung beschlussfähig ist.

P1: $(t \wedge b) \Rightarrow s$

Die Versammlung ist beschlussfähig, wenn mindestens 15 Teilnehmer anwesend sind.

P2: $f \Rightarrow b$

Die Teilnehmer sind rechtzeitig informiert worden, wenn es keinen Streik der Postbeamten gab.

P3: $\neg p \Rightarrow t$

Wenn die Versammlung nicht stattfand, dann waren weniger als 15 Teilnehmer anwesend oder es gab einen Streik der Postbeamten.

P4: $\neg s \Rightarrow (\neg f \vee p)$

Analyse natürlichsprachlicher Sätze

P1: $(t \wedge b) \Rightarrow s$ P2: $f \Rightarrow b$ P3: $\neg p \Rightarrow t$ P4: $\neg s \Rightarrow (\neg f \vee p)$

Beweis durch Widerspruch

Annahme P1, P2, P3 seien wahr und P4 sei falsch

Eine Implikation (P4) ist nur dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr ist

deshalb ist ¬s wahr und somit s falsch

und die Konsequenz falsch ist. Oder $(\neg f \vee p)$ ist falsch, wenn beides falsch ist.

deshalb ist ¬f falsch, f wahr und p falsch.

Aus P2 = wahr und f = wahr folgt

b = wahr

Aus P3 = wahr und p = falsch folgt

t = wahr

Somit ist P1 jetzt [(wahr ∧ wahr) ⇒ falsch] eine falsche Aussage, was im Widerspruch zur Annahme steht.
Deshalb sind beide Aussagen identisch.

Literatur und Quellen

Dr. Manfred Klenner, Universität Zürich, Vorlesungsskripte

Martin Ziegler, Universität Freiburg, Vorlesungsskripte

http://arbeitsblaetter.stangl_taller.at/denkentwicklung/logik.shtml, 12.01.08

http://de.wikipedia.org/wiki/Junktor , 12.01.08

http://de.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan , 12.01.08

http://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Maurice_Sheffer , 12.01.08

http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_S._Peirce , 12.01.08